

幾何型片塑造學童對稱概念初探 18 巧板單面玩法為例

高文山

拼圖筆記(網站)站長

proteon@ms51.hinet.net

<http://home.educities.edu.tw/proteon/>

摘要

本文探討關於十八巧板單面共28片三種給定盤面：49方盤、49截角方盤、五倍盤，精確計算拼排完成後之圖框內，其左右對稱及斜對角對稱值大小，藉以評斷該解答對稱性質的優劣，進而發展成為九年一貫數學學習領域幾何教學評量教具。

關鍵詞：多半方塊、十八巧板、單面、49方盤、49截角方盤、五倍盤、最佳對稱。

Keywords: Polytans、18 Pro-Tangram、one-sided、49 square、49 chamfered square、quintuple、most symmetry.

前言

等面積不同造型的幾何形片簡稱等積異形(Polyforms)，正方形由對角線二等份切割(或摺疊)成為等腰直角三角形，故稱為多半方塊。多個多半方塊的組合依照等長的邊完全接合的原則，總共只能產生四種三半方塊(Tritans)及十四種四半方塊(Tetratans)多邊形的幾何形片，合稱「18巧板」。如果把非對稱(asymmetry)的型片再增加反面的一片，拼排的時候都不能再翻面使用，稱為單面玩法。再用全部或部分的型片去填滿一個給定外框之拼圖遊戲，卻有很多種排列組合的方式，此類的拼圖活動一般稱為收斂性的拼板遊戲[3]、平面組合式(2D Assembly or put-together)益智玩具[1]或可稱為鋪地磚遊戲。

1. 主要內容

18 巧板依據每一個型片的組成構造，賦予相似的英文字母 A B C D F G H I J K M Q R S V W X Z 命名(圖 1) [2.1]，如此可以分辨每一個型片，在進行拼排遊戲的時候也可以準確地旋轉方位擺放，避免永無止境的嘗試錯誤。其中國民小學低年級認知的基本幾何形狀：正方形(X)、長方形(H)、三角形(W)、梯形(DM)、平行四邊形(I Z)等均已包含在內。[4]

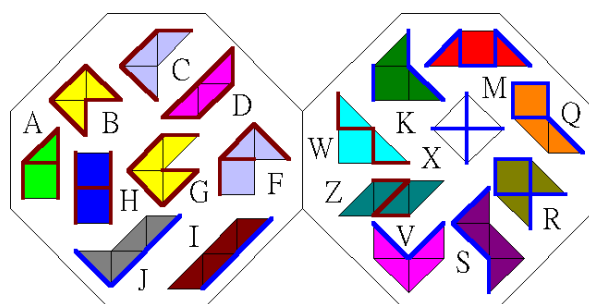


圖 1：18 巧板型片組成構造

1.1 單面玩法類型

28 片型片(圖 2)的總面積為 $1.5 \times 6 + 2 \times 22 = 53$ 個單位正方形。

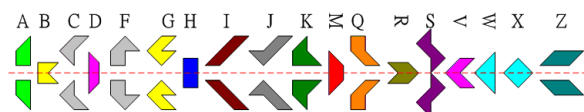


圖 2：28 片上下對稱排列

遊戲盤面目前僅就

49 方盤： $7 \times 7 = 49$ 之斜對稱及左右對稱。

49 截角方盤：斜對稱及左右對稱。

五倍盤(X)： $5 \times 2 \times 5 = 50$ 之斜對稱及左右對稱。

三種盤面一些對稱性較佳的結果進一步的探討，並試圖尋找各類最佳對稱的解。

另外將台灣地圖調整適當比例，運用類似方格估算曲線圍成平面區域的方法，使用全部的型片拼台灣地圖，藉以激發學童創意思考，並達成寓教於樂的目標。

1.2 49 方盤[2.2]

$7 \times 7 = 49$ 個單位正方形的盤面，簡稱 49 方盤，所以填滿 49 方盤後會剩下 2 片四半方塊的型片。圖 3 的解答其對稱軸(axis)上的斜邊(hypotenuse)數有 5 條以金色表示(=5 2)，對稱軸的單側各有 11 條直角邊(side)及 13 條斜邊(=11+13 2)，斜對稱值 $dsym = 22 + 31 \times 2 = 5 \times 2 + (11 + 13 \times 2) \times 2$ ；未對稱排列(僅供初步判斷使用)的則有 3 條直角邊及 4 條斜邊以藍色表示。如此精確的計算值應該可以達到評斷對稱性質優劣的標準了。

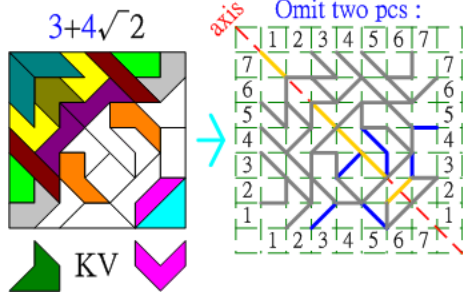


圖 3：捨去 KV 斜對稱

圖 4 僅就捨去 FS 型片對(pair)的兩個答案分析：雖然未對稱邊長 $6+3\sqrt{2}$ 相等，但是斜對稱值 (dsym) 則是 F 的值大於 S 的值。

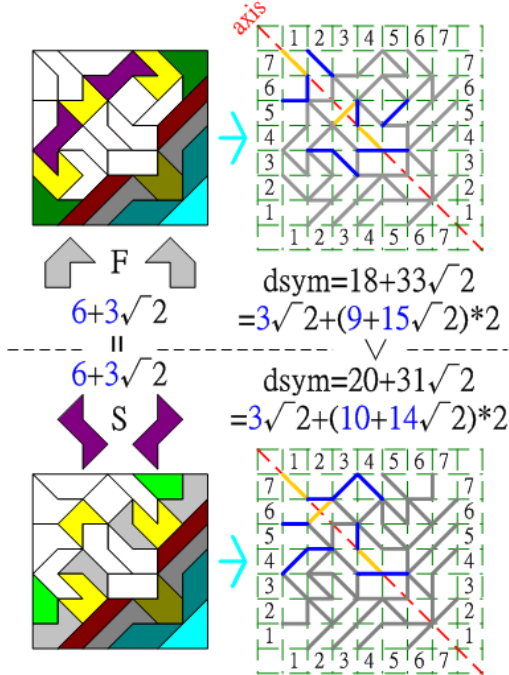


圖 4：捨去 FS 斜對稱值比較

圖 5 則是捨去 RW 型片又可以堆疊成左右對稱圖形也很有趣！

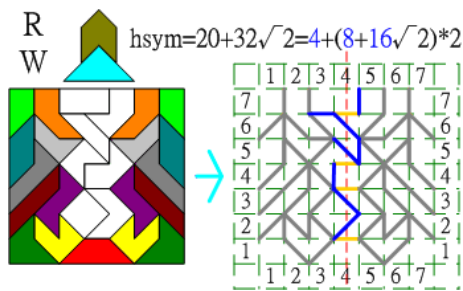


圖 5：捨去 RW 左右對稱

1.3 49 截角方盤[2.2]

以下的兩種玩法一般的學童會很自然地將盤面旋轉 45 度，但在分析時仍應以方格網的方位為基準。截角方盤的面積如何歸納為八邊形計算的方法(圖 6)，即以虛線正方形截去四個角隅的等腰直角三角形，底邊 L 為 2 個單位；斜邊數以 H 計數即可。

其實上段的 49 方盤亦可視為 $L=7, H=0$ 及下段的五倍盤亦可視為 $L=0, H=5$ 均為八邊形的特例 [2.5]。

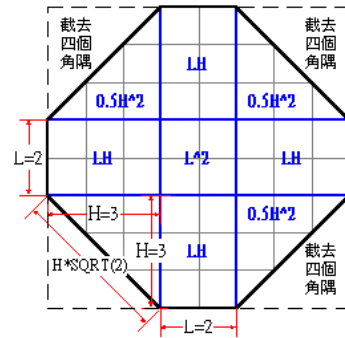
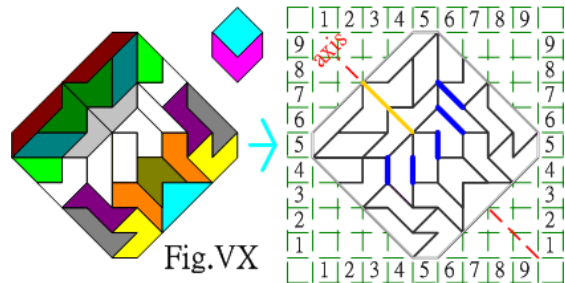
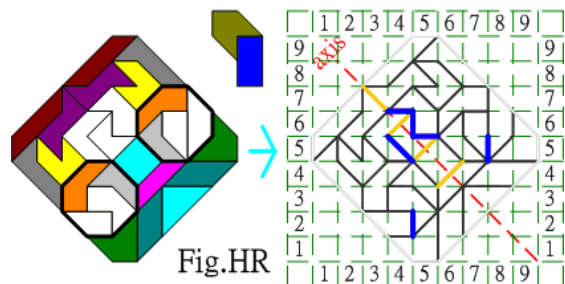


圖 6：八邊形面積 = $L^2 + 4LH + 2H^2$

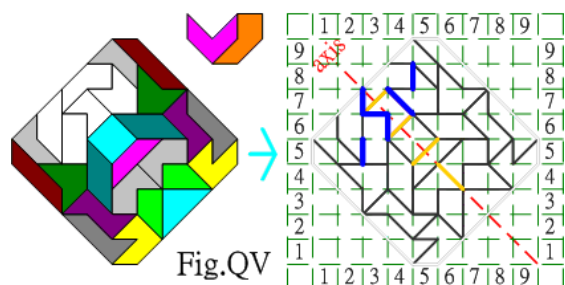
方形的盤面還有一個類似正方形的八邊形區域，簡稱 49 截角方盤 ($L=1, H=4$)，圖 7 有 3 個解依序排列



dsym = $36 + 24\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + (18 + 11\sqrt{2}) * 2$



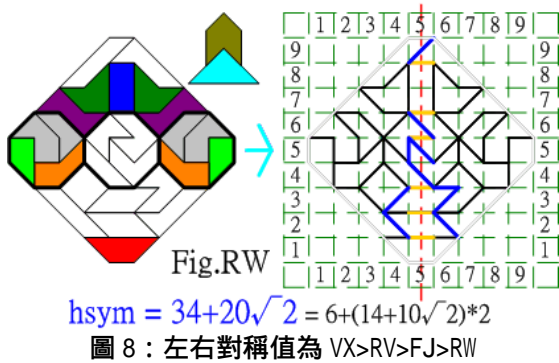
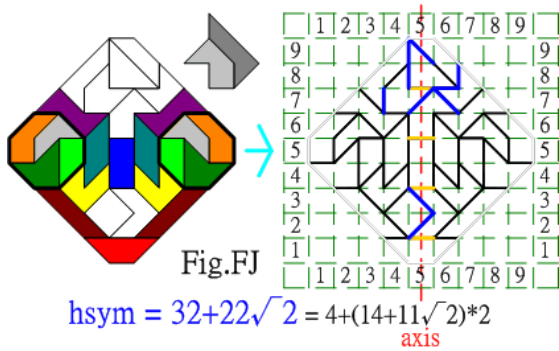
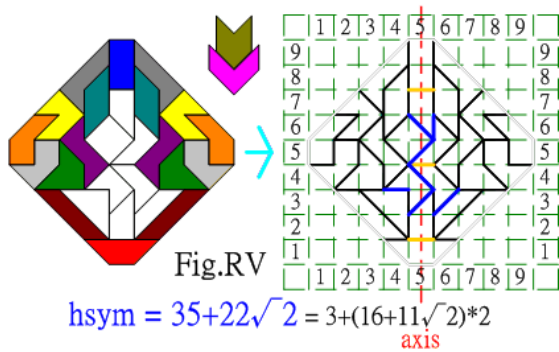
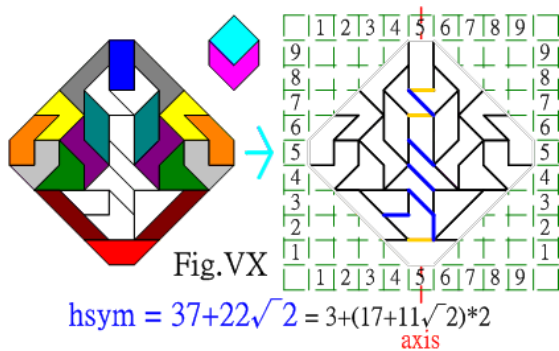
dsym = $30 + 28\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + (15 + 12\sqrt{2}) * 2$



dsym = $32 + 26\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + (16 + 11\sqrt{2}) * 2$

圖 7：斜對稱值為捨去 $VX > HR > QV$

圖 8 有 4 個解依序排列，Fig.VX 左右對稱值最大，Fig.FJ 有 ACKQ 及 Fig.RW 有 ACFQ 組成的一對小小八邊形左右對映，Fig.RW 正中央又多了 BDGV 小小八邊形，都是可以旋轉出更多的解答。



1.4 五倍盤[2.3]

把正方形(X)型片邊長各放大為五倍，拼盤面積為X型片的25倍總面積達50個單位正方形，簡稱五倍盤(X)，最後則會剩下2片三半方塊。

部分的型片所組成的子圖形，有時候經過簡單的變化可以導出另外的解答，僅就下圖9初步探討

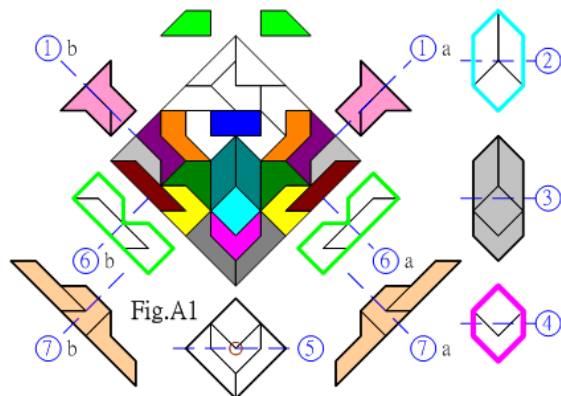


圖 9：左右對稱及其對稱子圖特別多

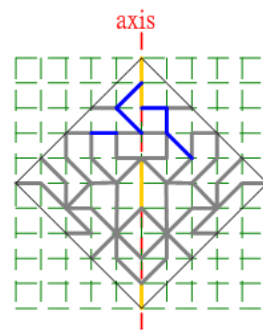


圖 10：圖 9 之 A1 解左右對稱值=35+24 2

圖 9 經過 6a&6b 對稱軸同時變換，及圖 11 之 CK=AK 同時對換後對稱值卻降低

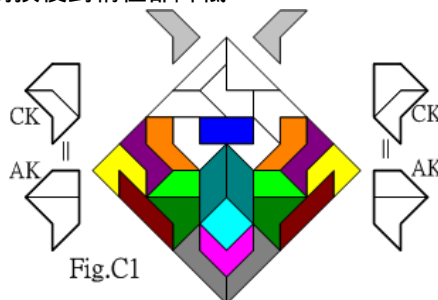


圖 11：左右對稱值=37+22 2

把圖 9 頂端型片稍作調整，未對稱的共同邊恰巧都落在 R 型片，可能就是三種玩法中最佳(大)對稱值 =37+24 2 =5+(16+12 2)*2

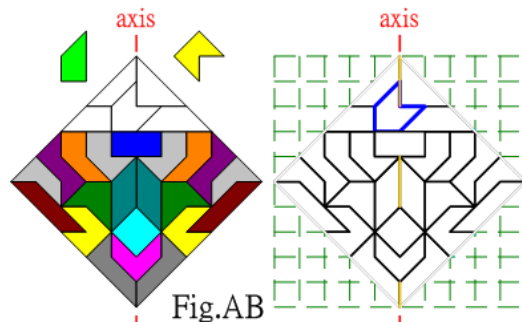


圖 12：是目前最佳對稱解？

這裡有四個五倍盤斜對稱值依大小次序排列，但都沒有破 $37+24\sqrt{2}$ 紀錄。

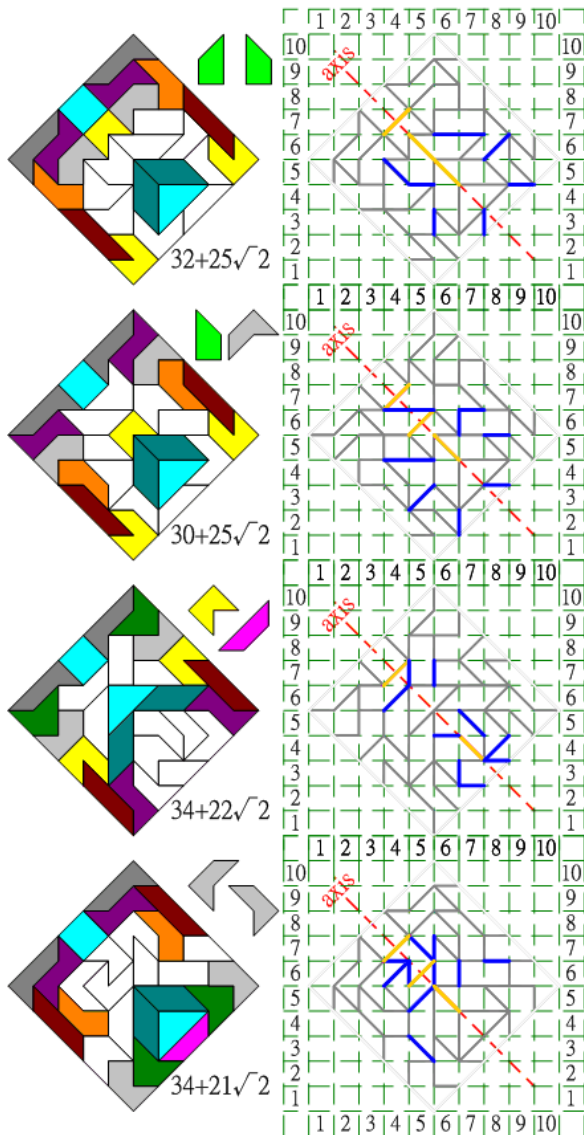


圖 13：四個五倍盤斜對稱值依大小次序排列

2. 數「味」台灣拼圖[2.6]

這裡加入了半方塊的元素來估算台灣地圖的面積，並須嘗試調整地圖的比例尺，讓估計值恰好為 53 單位正方形，以利全部的型片拼滿台灣。

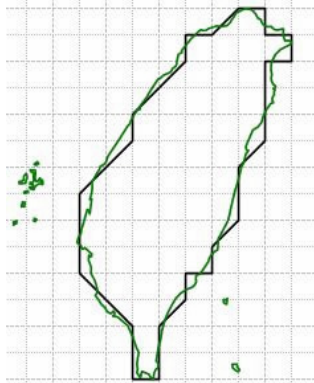


圖 14：半方格法估計台灣面積

這是實體台灣拼圖以 EVA 軟墊切割，正面均有壓花非常容易辨別。注意在粗黑線區域，有許多型片呈對稱排列，又在綠線區域，把 S 型片左移再將兩個 Z 型片上下對調並右移即可完成另一個解答。

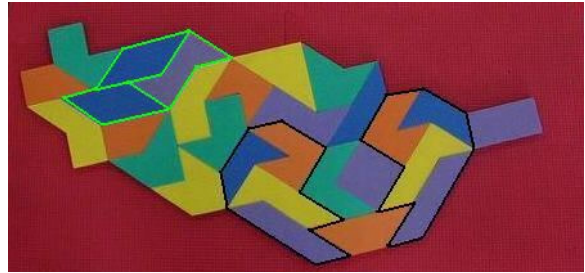


圖 15：EVA 軟墊台灣拼圖

這個解答卻有 3 個粗黑線圍成旋轉對稱的圖形，學童可以體驗 90 度及 180 度旋轉對稱概念。又在紅線區域還可把 2 個 C 型片同時左移再將兩個 Z 型片上下對調並右移即可完成另一個解答。

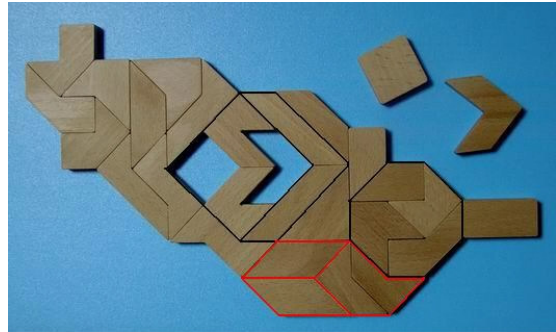


圖 16：原木台灣拼圖

遊戲的過程可以先拼排下列的盤面，盤面繪製部分的解答提示。下圖則增加了方格網更清楚：



圖 17：49 方盤即圖 5 捨去 RW 左右對稱解提示



圖 18：50 方盤捨去 CC 左右對稱解答



圖 19：49 截角方盤即圖 7 捨去 VX 斜對稱解提示

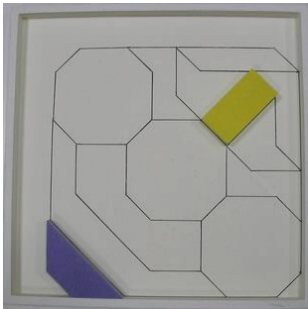


圖 20：49 截角方盤即圖 8 捨去 RW 左右對稱解提示

3. 電腦輔助解答

學童時常拼排很久無法完成，未免產生挫折感此時可藉助網路上專門破解益智玩具的電腦程式，目前免費分享的等積異形求解工具程式(solver)首推 polysolver[7]。下載後格網類別(Grid Type)選定半方塊(Tan)如下圖

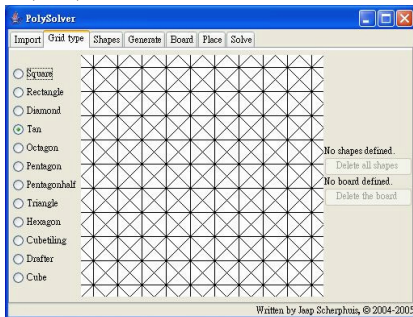


圖 21：格網類別選半方塊

再將下列 18 巧板單面共 28 片造型之文字檔：

```

tile ((0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,2),(0,0,2,3),(0,1,2,4),(0,1,3,5))
tile ((0,1),(0,1,1,1),(0,0,2,2),(0,1,2,3),(0,0,3,4),(0,1,3,5))
tile ((0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,2),(0,0,2,3),(1,0,2,4),(1,0,3,5))
tile ((0,1),(1,0,0,1),(0,0,1,2),(0,1,1,3),(0,0,2,4),(1,0,3,5))
tile ((0,0),(1,1,0,1),(0,0,1,2),(1,0,2,3),(1,0,3,4),(1,1,3,5))
tile ((1,1),(0,1,1,1),(1,0,1,2),(0,1,2,3),(1,0,2,4),(1,1,3,5))
tile ((0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,2),(0,0,2,3),(0,1,2,4),(1,0,2,5),(0,1,3,6),(1,0,3,7))
tile ((1,1),(0,0,1,1),(1,1,1,2),(0,0,2,3),(1,0,2,4),(1,1,2,5),(1,0,3,6),(1,1,3,7))
tile ((0,1),(1,0,0,1),(1,1,0,2),(0,0,1,3),(0,1,1,4),(0,0,2,5),(1,0,3,6),(1,1,3,7))
tile ((0,0),(0,1,0,1),(1,1,0,2),(0,0,1,3),(0,1,1,4),(1,0,2,5),(1,0,3,6),(1,1,3,7))
tile ((0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,2),(0,1,1,3),(0,1,1,4),(1,0,2,5),(1,0,3,6),(1,1,3,7))
tile ((0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,2),(0,1,1,3),(0,1,1,4),(1,0,2,5),(1,0,3,6),(1,1,3,7))
tile ((0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,2),(0,1,1,3),(0,1,1,4),(1,0,2,5),(1,0,3,6),(1,1,3,7))
tile ((0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,2),(0,1,1,3),(0,1,1,4),(1,0,2,5),(1,0,3,6),(1,1,3,7))
tile ((0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,2),(0,1,1,3),(0,1,1,4),(1,0,2,5),(1,0,3,6),(1,1,3,7))
tile ((0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,2),(0,1,1,3),(0,1,1,4),(1,0,2,5),(1,0,3,6),(1,1,3,7))
tile fixed((0,1),(1,1,0,1),(0,0,1,2),(0,1,1,3),(0,0,2,4),(1,0,2,5),(1,0,3,6),(1,1,3,7))
tile ((1,0),(2,0,0,1),(0,0,1,2),(1,0,1,3),(0,0,2,4),(1,0,2,5),(1,0,3,6),(2,0,3,7))
tile ((0,0),(1,0,0,1),(0,0,1,2),(1,0,1,3),(1,0,2,4),(2,0,2,5),(1,0,3,6),(2,0,3,7))

```

複製後貼上(只能使用 Ctrl-V 滑鼠右鍵功能失效)到輸入(Import)頁如下圖

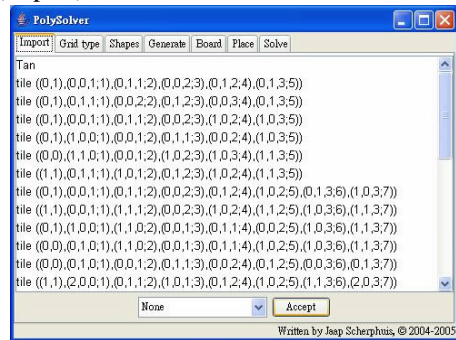


圖 22：以文字檔輸入型片

然後按下接受鍵(Accept)，再選型片(Shapes)頁檢視看看是否完成型片輸入(當然也可以在本頁一一自行輸入自訂的型片)的動作如下圖

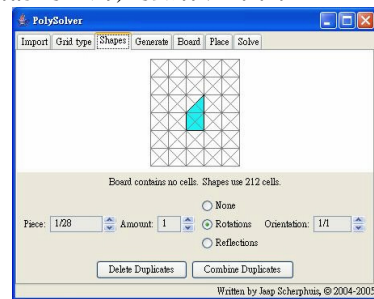


圖 23：檢視型片

請注意所有型片除 X 型片(None)外均設定為旋轉(Rotations)狀態。再選盤面(Board)頁以五倍盤(X)捨去 CC 為例，盤面先以拖曳方格方式如下圖

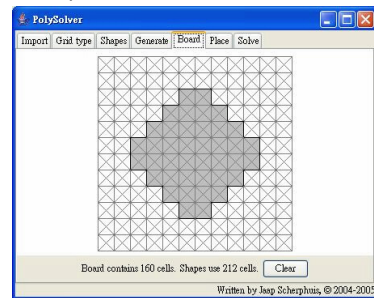


圖 24：先拖曳方格的部分

再補足半方塊斜邊，每個半方塊需佔 2 個單位元素(cell)，再塗上捨去的 2 個 C 型片，檢查盤面和原先輸入的型片元素總數是否相等(212 cells)如下圖

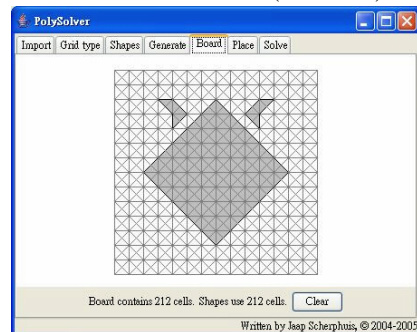


圖 25：再補足斜邊半方塊及 2 個 C

然後選擇預排(Piece)頁，可依個人邏輯判斷與喜好預排部分型片(Piece)後再選擇方位(Orientation)，然後點選一下型片，型片會變成白色且跟著滑鼠指標移動(此時左鍵可放鬆)，再點選預排盤面之位置後型片又恢復原色，才算完成預排動作。如下圖

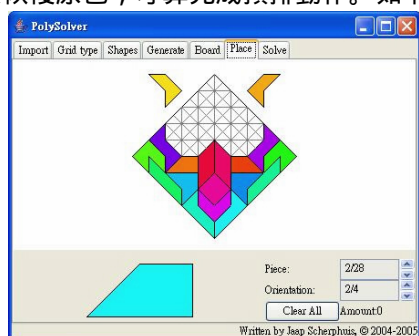


圖 26：預排部分型片

選擇求解(Solve)頁，按下求解(Solve)鍵後解答即迅速列出，待列表全部完成後求解過程字幕(Show progress)會自動變成灰字，表示求解完成，此時您可以拖曳全解列表一一展現。如下圖

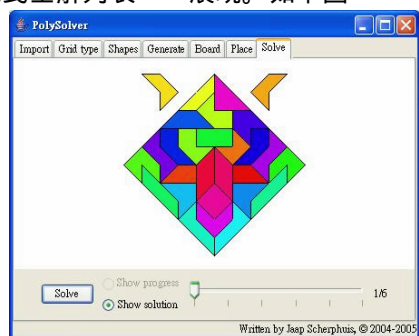


圖 27：過程字幕變成灰字表示求解完成

4. 結論

個人電腦越來越普及，CPU 運算的速度飛快成長，網際網路的便捷更是本遊戲得以初具成果的最大關鍵。五倍盤之 HMRVW 盤面對稱值較低，限於篇幅尚未列入討論[2.3]。部分的型片所組成的子圖形，有時候經過簡單的變化可以導出另外的解答，此類型的變化非常複雜更具挑戰性，本文尚未有系統的整理是今後努力的方向[2.4]。

5. 附錄

摘錄教育部九年一貫數學學習領域課程綱要與本遊戲相關之分年細目詮釋條文：

1-s-02 能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體。1-s-04 能依給定圖示，將簡單形體作平面鋪設與立體堆疊。2-s-05 能認識面積，並作直接比較。(同2-n-17) 2-s-06 能由邊長關係，認識簡單平面圖形與立體形體。3-s-01 能認識平面圖形的內部、外部與其周界。3-s-02 能認識周長，並實測周長。3-s-05 能利用間接比較或以個別單位實測的方法比較不同面積的大小，並認識面積單位「平方公分」。(同3-n-18) 3-s-06 能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形。4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。4-s-03

能認識平面圖形全等的意義。4-s-07 能由直角、垂直與平行的概念，認識簡單平面圖形。5-s-04 能認識線對稱，並理解簡單平面圖形的線對稱性質。5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同5-n-16) 6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例尺。6-s-03* 能以適當的正方形單位，對曲線圍成的平面區域估算其面積。(同6-n-11*) 8-s-01 能認識生活中的平面圖形(三角形、四邊形、多邊形及圓形)。8-s-10 能理解平面圖形線對稱的意義。8-s-17 能理解四邊形的基本性質。8-s-18 能理解特殊四邊形的定義。8-s-24 能理解平行四邊形的判別性質。8-s-25 能理解平行四邊形的面積公式。8-s-26 能理解梯形的意義與性質(包含梯形中線性質)。9-s-02 能對簡單的相似多邊形指出對應邊成比例、對應角相等性質。

6. 參考文獻

- [1] 邱錦華/智慧幾何聯盟/相關教學/益智玩具分類
<http://myweb.hinet.net/home8/ching-golden/puzzle/study/06.htm>
- [2] 高文山/ 拼圖筆記/好戲上場囉/
 1. Note 2.0.OM
<http://home.educities.edu.tw/proteon/note20om.htm>
 2. Note 2.OS
<http://home.educities.edu.tw/proteon/note2os.htm>
 3. Note 2.OSQ
<http://home.educities.edu.tw/proteon/note2osq.htm>
 4. Note 2.IS
<http://home.educities.edu.tw/proteon/note2is.htm>
 5. Note 6.A
<http://home.educities.edu.tw/proteon/note6a.htm>
 - 6./拼圖筆記/大條代誌/2007/06/16~19
http://home.educities.edu.tw/proteon/2007_tccp_dragon_boat_festival.htm
- [3] 張世宗/ UEPlay 游藝館/『益智游藝』分類說明
http://www.artofplay.net/blog/index.php/?page_id=244
- [4] 教育部九年一貫數學學習領域綱要修訂小組/國教專業社群網/九年一貫課程/學習領域/數學/附錄二 分年細目詮釋
http://teach.eje.edu.tw/9CC/fields/2003/math_7.php
- [5] Alfred Wassermann / Placing the 18 one-sided pentominoes in a 9 x 10 rectangle
<http://did.mat.uni-bayreuth.de/~alfred/home/index.html>
- [6] Donald E. Knuth (高德納) / Preprints of Recent Papers / Refereed Papers / P159 Dancing links
<http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/preprints.html>
- [7] Jaap Scherphuis / PolySolver
<http://www.geocities.com/jaapsch/puzzles/polysolver.htm>
- [8] WILFRED J. HANSEN / Equivalence Classes Among Pentomino Tilings of the 6x10 Rectangle (CMU-ITC-91-092 10 January 1991) [PDF] :
<http://reports-archive.adm.cs.cmu.edu/anon/itc/CMU-ITC-092.pdf>
<http://www.cs.cmu.edu/~wjh/papers/hexclass.html>